chap. 2 : L'équation de la chaleur :

I] Un peu de modélisation à la Fourier

↳ cf cours VF.

On s'intéresse alors à : trouver $u = u(t,x)$ solution de

$$(1)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, & t>0, \quad x \in]0,1[, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t>0, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in]0,1[, \end{cases}$$

pour $u_0 \in \mathcal{C}(]0,1[)$ donnée.

Thm 1 : Si $u_0 \in \mathcal{C}(]0,1[)$, alors il existe une unique solution u de (1). Elle vérifie

(i) $u \in \mathcal{C}^\infty(]0;+\infty[\times]0,1[)$,

(ii) $u(t,\cdot) \in L^2(]0,1[)$, $\forall t>0$.

De plus, on a une formule pour $u(t,x)$.

II | Séries de Fourier

cf notes tapées "méthodes spectrales chap. 1.I"

III | Retour au théorème d'existence

cf notes tapées "méthodes spectrales chap 1.II"

IV | Discrétisation différences finies :

On a donc vu que les solutions u de l'équation (1) sont très régulières en espace ($\mathcal{C}^\infty$), et ce même si $u_0 \in L^2$ seulement. Il est donc naturel de considérer une approche différences finie pour approcher u. En effet, la formule de représentation n'est utile que si on peut calculer $(c_m(u_0))_{m\in\mathbb{Z}}$, ce qui n'est que rarement possible (sinon DFT / FFT mais autre histoire).

IV.1 | (Encore) un peu d'algèbre linéaire :

Notons de nouveau

$$A_{0h} := \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}).$$

Thm 5 : Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Les valeurs propres $(\lambda_j)_{j=1}^N$ de A_{0h} sont données par

$$\lambda_j := \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{j\pi}{2(N+1)}\right), \; j \in \{1, \dots, N\}.$$

<u>Preuve</u> : On cherche donc $\lambda_j \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\exists V \in \mathbb{R}^N$ vérifiant

$$A_{0h} V = \lambda_j V, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}.$$

Ce problème <u>discret</u> est l'analogue DF de : trouver $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{C}^2(]0,1[)$ tq

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x), & x \in]0,1[\; (*) \\ u(0) = u(1) = 0. & (**) \end{cases}$$

Il est clair que $u(x) = \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$ est solution de $(*)$. Pour être solution de $(**)$, il faut que $\lambda = (m\pi)^2$ (λ un <u>pdv</u> fonctionnel, $((m\pi)^2, \sin(\pi m x))_m$ forme la famille des solutions propres du laplacien.

Discrétisons cette famille : Notons

$$v_j^m := \sin(\pi m x_j), \quad x_j = jh, \; j \in \{0, \dots, N+1\}.$$

et regardons les liens entre v^m et A_{0h}. On a

$\boxed{\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}$

$$(A_{0h} v^m)_j = \frac{-v^m_{j+1} + 2 v^m_j - v^m_{j-1}}{h^2}$$ car $v_0 = v_{N+1} = 0$.

$$= \frac{-\sin(m\pi(j+1)h) + 2\sin(m\pi jh) - \sin(m\pi(j-1)h)}{h^2}$$

$$= \frac{1}{h^2}\Big[-\cancel{\sin(m\pi h)\cos(m\pi jh)} - \sin(\pi m jh)\cos(\pi m h) + 2\sin(m\pi jh) - \sin(m\pi jh)\cos(m\pi h) + \cancel{\sin(m\pi h)\cos(\pi m jh)}\Big]$$

$\boxed{\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)}$

$$= \frac{2\sin(m\pi jh)}{h^2}\Big[1 - \cos(\pi m h)\Big]$$

$$= \frac{2}{h^2}\underbrace{\sin(\pi m jh)}_{v_j}\Big[1 - 1 + 2\sin^2(\pi m h)\Big]$$

$$= \frac{4}{h^2}\sin^2(\pi m h)\, v^m_j \qquad \blacksquare$$

<u>Rem</u> : Cette preuve fournit aussi la <u>base</u> de vecteurs propres $(v^m)_{m=1}^{N}$ qui permet de diagonaliser A_{0h}. En particulier, toute sol. de $A_{0h} U_h = b_h$ se décompose donc dans une telle base.

On peut maintenant revenir à la chaleur.

IV.2 Discrétisation(s).

Soit $u = u(t,x)$ sol. de (1). On a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x_j) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x_j) = 0, \quad 1 \leq j \leq N$$

et donc $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x_j) - A_{0h}\, u(t,x_j) = R_j$. En particulier vu que $u(t,\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(]0,1[)$, $\|R\|_\infty \leq ch^2$ et on peut approcher cette équation par

$$\boxed{u_j'(t) - A_{0h}\, u_j(t) = 0}, \quad u_j(t) \simeq u(t,x_j)$$